Seminar *Integrable Systeme und das KAM-Theorem*

Vortrag 7: Geodäten auf Ellipsoiden

Gabriele Benedetti

22. Januar 2019

Unser Ziel heute ist zu zeigen, dass der geodätische Fluß auf einem Ellipsoid in $\mathbb{R}^n$ vollständig integrabel ist. Um dieses Resultat zu beweisen führen wir die Mannigfaltigkeit, deren Elemente die orientierten affinen Geraden des $\mathbb{R}^n$ sind, ein. Aber vorher brauchen wir den folgenden allgemeinen Hilfsatz.

Hilfsatz 0.1. *Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $i : \Sigma \hookrightarrow M$ eine eigentlich eingebettete Hyperfläche. Dann besitzt die Einschränkung $i^*\omega$ auf Σ ein eindimensionaler Annihilator V_Σ auf jedem Tangentialraum $T_\sigma\Sigma$. Es sei weiter $L \subset \Sigma$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann L ist Lagrangesch genau dann, wenn $V_\Sigma \subset TL$.*

Es sei nun angenommen, dass $H : M \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $\Sigma = \{H = h\}$ für irgendwelchen regulären Wert h von H. Dann spannt das Hamiltonsche Vektorfeld X_H auf Σ die Distribution V_Σ auf. Insbesondere $L \subset \{H = h\}$ Lagrangesch ist, genau dann wenn L invariant unter dem Fluß von H ist.

Folgerung 0.2. *Es seien $F_1, \ldots, F_n : (M, \omega) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es sei $f \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert der Abbildung $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}^n$ und definiere man die Untermannigfaltigkeit $L := \{F = f\}$. Dann ist L Lagrangesch genau dann, wenn*

$$\forall\, x \in L,\ \forall\, i, j = 1, \ldots, n, \qquad \{F_i, F_j\}(x) = 0,$$

also die Funktionen F_i und F_j Poisson-kommutieren auf L.

1 Die Mannigfaltigkeit der Geraden

In diesem Abschnitt werden wir stets Vektoren und Kovektoren in $\mathbb{R}^{2n}$ durch die von der euklidischen Metrik induzierte Dualität identifizieren.

Es sei Γ die Menge deren Elemente g affine orientierte Geraden des $\mathbb{R}^n$ sind. Also, wenn $g \in \Gamma$, gibt es $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $p \neq 0$, für die $g = \{q + tp \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Die Menge Γ ist eigentlich eine Mannigfaltigkeit mit Karten

$$\varphi_i^\pm : B^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \Gamma_i^\pm,$$

wobei $\Gamma_i^\pm \subset \Gamma$ die Menge der Geraden ist, die positiv, bzw. negativ, transversal die Hyperebene $\{q_i = 0\}$ schneidet. Zum Beispiel, die Gerade $\varphi_n^\pm(x,y)$ ist definiert als die einzige Gerade, die durch den Punkt $(y,0)$ in Richtung $(x, \pm\sqrt{1-|x|^2})$ läuft.

Aufgabe 1.1. *Zeigen Sie, dass Γ diffeomörph zu $T^*S^{n-1} \cong TS^{n-1}$ ist. Der Diffeomorphismus $g \mapsto (x(g) = p, y(g) = q)$, wobei p die Richtung von g ist und q der Punkt auf g mit kleinster Norm.*

Es sei außerdem $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ die Funktion $H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2$, deren Hamiltonscher Fluß $(q,p) \mapsto (q + tp, p)$ ist. Wir können dann Γ auch so erhalten, indem wir den Quotient der Menge $Y := \{H = \frac{1}{2}\}$ bezüglich des Flußes von H nehmen, wobei zwei Elemente von Y äquivalent sind, wenn sie auf der gleichen Flußlinie von H sind. Wir haben also auch eine Quotientenabbildung $\pi_Y : Y \to \Gamma$. Auf dieser Weise können wir Γ mit einer symplektischen Form ω^Γ versehen. Die ist eindeutig definiert durch die Eigenschaft

$$i_Y^* \omega^{\mathbb{R}^{2n}} = \pi_Y^* \omega^\Gamma,$$

wobei $i : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ die Inklusion ist. Das bedeutet, dass, wenn $\xi_1, \xi_2 \in T_g\Gamma$, wir $(q,p) \in Y$ und $v_1, v_2 \in T_{(q,p)}Y$ mit $\pi_Y(q,p) = g$ und $d_{(p,q)}\pi_Y[v_i] = \xi_i$ nehmen können und

$$\omega_g^\Gamma(\xi_1, \xi_2) = \omega_{(q,p)}^{\mathbb{R}^{2n}}(v_1, v_2)$$

definieren. Man kann dann zeigen, dass die rechte Seite nicht von (p,q) oder v_1, v_2 abhängt.

Aufgabe 1.2. *Zeigen Sie, dass die Karten $\varphi_i^\pm$ Darboux sind, also dass $\omega^\Gamma = \sum_i dy^i \wedge dx^i$.*

Wir definieren nun bestimmte Hamiltonsche Funktionen auf Γ, deren Hamiltonscher Fluß für uns wichtig wird.

2 Geodätischer Fluß von Hyperflächen

Es sei $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei angenommen, dass $\bar{k} \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von k ist. Dann ist $M = M_{k,\bar{k}} := \{k = \bar{k}\}$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ mit Normalenvektor $\nu = \nu_{k,\bar{k}}$. Wir betrachten Geodäten γ auf M die durch die folgende Eigenschaft definiert sind: Wenn γ als Kurve in $\mathbb{R}^n$ betrachtet ist, steht die Beschleunigungsvektor senkrecht zu $T_\gamma M$, also $\ddot{\gamma}$ paralle zu $\nu(\gamma)$ ist. Wir haben gesehen, dass bis auf der Identifizierung von Tangential- und Kotangentialbündel mittels der Metrik, ist das Paar $(\gamma, \dot{\gamma})$ eine Flußlinie des Hamiltonschen Flußes von $\tilde{H} : T^*M \to \mathbb{R}, \tilde{H}(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2$.

Wir wollen nun auch T^*M als symplektischen Quotient verstehen. Zu diesem Zweck betrachten wir den Lift K von k auf $\mathbb{R}^{2n}$, die als $K(q,p) = k(q)$ definiert ist. Dann ist der Hamiltonsche Fluß von K gegeben durch $(q,p) \mapsto (q, p + t d_q k)$. Wir nehmen nun $Z := \{K = \bar{k}\} = M \times \mathbb{R}^n$. Wenn $(q,p) \in Z$, ist $q \in M$ und der Fluß ist eine Translation parallel zum ν. Also können wir den Quotient mit den Vektoren identifizieren, die senkrecht zu ν sind.

Das ist genau $TM \cong T^*M$ und wir bekommen die Quotientenabbildung $\pi_Z : Z \to T^*M$. Es ist leicht zu sehen, dass die Quotientenform ω^{T^*M}, die durch

$$i_Z^* \omega^{\mathbb{R}^{2n}} = \pi_Z^* \omega^{T^*M}$$

definiert ist, gerade die kanonische symplektische Form auf dem Kotangentialbündel ist.

Wir nehmen nun die Hyperfläche $\Sigma := \{\tilde{H} = \frac{1}{2}\}$, die invariant unter dem geodätischen Fluß auf M ist. Die Flußlinien auf Σ sind durch die Geodäten mit Geschwindigkeit gleich 1 gegeben. Wir schreiben mit $l_\Sigma : \Sigma \to T^*M$ die kanonische Einbettung.

Wir können Σ auch als Teilmenge in Γ betrachten, durch die Abbildung $j_\Sigma : \Sigma \to \Gamma$, die jedem Paar $(q,p) \in \Sigma$ die Gerade $g = \{q + tp\}$ zuordnet. Die Abbildung j_Σ ist aber nicht unbedingt eine Einbettung. Zum Beispiel, wenn es eine Gerade g gibt, die tangent zu M in zwei Punkten ist, ist dann j_Σ nicht injektiv. Dann fragen wir uns, wenn j_Σ zumindest eine lokale Einbettung ist. Wir führen dazu die Schnittmenge

$$W = Y \cap Z = M \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

und die Einbettung $i_\Sigma : \Sigma \subset W$ ein. Dann ist $j_\Sigma = \pi_Y|_W \circ i_\Sigma$. Nach der Definition von π_Y ist $d_w \pi_Y|_W$ singulär genau dann, wenn $V_Y(w) \subset T_w W$ und, in diesem Fall, $\ker d_w(\pi_Y|_W) = V_Y(w)$. Also ist j_Σ eine lokale Einbettung genau dann, wenn $X_H \notin T\Sigma$. Nun ist $\Sigma = \{k(q) = 0,\ p \cdot \nabla k(q) = 0\}$. Es folgert daraus, dass für $(q,p) \in \Sigma$

$$X_H(q,p) \notin T_{(q,p)}\Sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \cdot \operatorname{Hess} k(q) \cdot p \neq 0.$$

Das passiert, wenn zum Beispiel M convex ist. Wenn k ein Polynom zweiten Grades ist (also ist M eine Quadrik), hat eine Gerade g entweder genau eine Richtung (q,p) und der ist regulär, oder ist g in M enthalten. Im zweiten Fall, ist dann die Gerade g der Träger einer Geodäte auf M.

Aufgabe 2.1. *Beschreiben Sie, die Menge der Geraden, die tangent zum (einschaligen) elliptischen Hyperboloid sind.*

Wir schreiben mit Σ' die offene Teilmenge von Σ, deren Elemente die regulären Richtungen sind. Die Abbildung $j_{\Sigma'} : \Sigma' \to \Gamma$ ist eine lokale Einbettung. Für eine nicht ausgeartete Quadrik M ist $j_{\Sigma'}$ eine globale Einbettung und Σ' liegt dicht in Σ.

Hilfsatz 2.2. *Die Distributionen $V_{l_{\Sigma'}}^{T^*M}$ und $V_{j_{\Sigma'}}^{\Gamma}$ stimmen überein.*

Beweis. Die Distribution $V_{l_{\Sigma'}}^{T^*M}$ ist der Annullator von $l_{\Sigma'}^* \omega^{T^*M}$. Aber $l_{\Sigma'} = \pi_Y|_W \circ i_{\Sigma'}$ und daher

$$l_{\Sigma'}^* \omega^{T^*M} = i_{\Sigma'}^* (\pi_Y|_W)^* \omega^{T^*M} = i_{\Sigma'}^* \omega^{\mathbb{R}^{2n}}|_W.$$

Andererseits ist $V_{j_{\Sigma'}}^{\Gamma}$ der Annullator von $j_{\Sigma'}^* \omega^\Gamma$ und auf ähnlicher lässt sich zeigen, dass $j_{\Sigma'}^* \omega^\Gamma = i_{\Sigma'}^* \omega^{\mathbb{R}^{2n}}|_W$. Also $j_{\Sigma'}^* \omega^\Gamma = l_{\Sigma'}^* \omega^{T^*M}$ und deshalb auch die Annullatoren übereinstimmen. $\square$

Wir möchten nun eine Funktion $\tilde{K} : \Gamma \to \mathbb{R}$ finden, so dass $\Sigma := \{\tilde{K} = \bar{k}\}$. Das ist leicht zu erreichen. Wir setzen $\tilde{K}(g) = k(\bar{q})$, wobei $\bar{q} \in g$ ein kritischer Punkt der Funktion $k|_g$ ist. Konkreter ist $\bar{q} = q+\bar{t}p$, wobei $\pi_Y(q,p) = g$ und $\bar{t} \in \mathbb{R}$ kritischer Punkt von $t \mapsto k(q+tp)$ ist. Wenn $k(\bar{q})$ ein regulärer Wert von k ist, ist dann $(\bar{q}, p) \in TM_{k,k(\bar{q})}$. Im Große ist vielleicht $\tilde{K}$ nicht definiert: die Funktion $k|_g$ könnte mehrere oder keinen kritischen Punkt haben. Selbst wenn eindeutig definiert, könnte der Punkt $\bar{q}$ und, deswegen auch $k(\bar{q})$, nicht von g glatt abhängig sein. Das passiert, wenn die zweite Ableitung von $t \mapsto k(q + tp)$ ungleich Null in $\bar{t}$. Also wenn $p \cdot \operatorname{Hess} k(\bar{q})p \neq 0$, die Gleichbedeutend ist mit $g \in \Sigma'_{k,k(\bar{q})}$.

Es seien nun zwei Hyperflächen $M_1 = \{k_1 = \bar{k}_1\}$ und $M_2 = \{k_2 = \bar{k}_2\}$ mit Einheitskotangentialbündel Σ_1 und Σ_2. Es seien weiter Σ'_1 und Σ'_2 die Mengen der regulären Richtungen. Wir werden hier annehmen, dass Σ'_1 und Σ'_2 sich transvers schneiden. Allgemein lässt sich diese Bedingung nicht so einfach ausdrücken und die sollte in konkreten Fällen nochmal direkt geprüft. Für $g \in \Gamma$ sei schließlich $\nu_1(g)$ der Normalenvektor auf M_1 zu dem Berührungspunkt zwischen g und M_1 und es sei ν_2 der Normalenvektor auf M_2 zu dem Berührungspunkt zwischen g und M_2.

Hilfsatz 2.3. *Wenn für alle $g \in \Gamma$ die Vektoren $\nu_1(g)$ und $\nu_2(g)$ senkrecht stehen, sind dann $V_{\Sigma'_1}$ und $V_{\Sigma'_2}$ tangent zu $\Sigma'_1 \cap \Sigma'_2$. Äquivalent gilt $\omega^\Gamma(V_{\Sigma'_1}, V_{\Sigma'_2}) = 0$.*

Beweis. Es seien $g_0 \in \Sigma'_1 \cap \Sigma'_2$ und $s \mapsto g(s)$ die Hamiltonsche Flußlinie von $\tilde{K}_1$ mit $g(0) = g_0$. Dann $g(s) = \{q_1(s) + t\dot{q}_1(s)\}$, wobei $q_1(s)$ die einzige Geodäte auf M_1 ist, die für $s = 0$ tangent mit g_0 ist. Das heißt, dass $\ddot{q}_1(0) = c_1\nu_1(g)$ für $c_1 \in \mathbb{R}$. Es sei weiter $t(s) \in \mathbb{R}$, so dass $q_2(s) := q_1(s) + t(s)\dot{q}_1(s)$ der Berührungspunkt zwischen $g(s)$ und $\{k_2 = k_2(q_2(s))\}$ ist. Also $\nabla k_2(q_2(s)) \cdot \dot{q}_1(s) = 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \tilde{K}_2(g(s)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} k_2(q_2(s)) &= \nabla k_2(q_2(0)) \cdot \Big((1 + \dot{t}(0))\dot{q}_1(0) + t(0)\ddot{q}_1(0)\Big) \\ &= t(0)\nabla k_2(q_2(0)) \cdot \ddot{q}_1(0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass $\nabla k_2(q_2(0))$ parallel zu $\nu_2(g)$ und $\ddot{q}_1(0)$ zu $\nu_1(g)$ sind. Das zeigt, dass $V_{\Sigma'_1} \subset T\Sigma'_2$ ist. Daher $V_{\Sigma'_1} \subset T_{\Sigma'_1} \cap T_{\Sigma'_2} = T(\Sigma'_1 \cap \Sigma'_2)$. □

3 Dualität und Quadriken

3.1 Duale Hyperflächen

Es sei V ein reeller Vektorraum. Zu jedem $p \in V^*$, $p \neq 0$ ist eine nicht den Ursprung enthaltende affine Hyperebene $H_p \subset V$ durch die Gleichung $H_p := \{q \in V \mid p \cdot q = 1\}$ zugeordnet. Umgekehrt gilt: für jede affine Hyperebene $H \subset V$, die den Ursprung nicht enthält, gibt es genau ein $p \in V^*$, $p \neq 0$ sodass $H = H_p$. Nach der Identifizierung $V \cong V^{**}$ sehen wir unmittelbar, dass $q \in H_p$ genau dann, wenn $p \in H_q$.

Es sei nun eine reguläre Hyperfläche $M \subset V$ gegeben mit der Eigenschaft, dass für alle $q \in M$ der Vektor q nicht in T_qM liegt. Das bedeutet, dass die affine Hyperebene $q + T_qM$ den Ursprung nicht enthält. Also gibt es $p \in V$, sodass $H_p = q + T_qM$. Die Menge

$$M^* := \{p \in V^* \mid \exists\, q \in M,\ H_p = q + T_qM\} \subset V^*$$

heißt duale Hyperfläche von M. Man sollte eigentlich in einzelnen Fällen schauen, ob M_* wirklich glatt und eingebettet ist. Wenn das passiert, haben wir den folgenden Satz, der als Lemma 4.10 in *Geometry and Billiards* von Tabachnikov zu finden ist.

Hilfsatz 3.1. *Die duale Hyperfläche zu M^* ist M, also $M^{**} = M$.* □

3.2 Dualität für Quadriken

Es sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Wir schreiben $v \mapsto v^*$ für die induzierte Dualität $V \to V^*$ und $p \mapsto p^*$ für ihre Inverse, die auch als die von dem dualen Skalarprodukt $\langle , \rangle : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ induzierte Dualität betrachtet werden kann.

Es sei weiter $A : V \to V$ ein linearer Isomorphismus, der symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes ist, d.h. $\langle Aq_1, q_2 \rangle = \langle q_1, Aq_2 \rangle$ für alle $q_1, q_2 \in V$. Wir schreiben mit $A^* : V^* \to V^*$ die Abbildung definiert durch

$$A^*p = \big(Ap^*\big)^*. \tag{3.1}$$

Da A symmetrisch ist, gilt es $A^*p = p \circ A$. Wenn $q \mapsto Aq$ durch eine Matrix bezüglich einer Basis dargestellt ist, ist dann $p \mapsto A^*p$ durch die gleiche Matrix bezüglich der dualen Basis dargestellt.

Wir betrachten nun die Quadrik in V, die assoziiert mit $\langle , \rangle$ und A^-1 ist,

$$M_{A^{-1}} := \{q \in V \mid \langle q, A^{-1}q \rangle = 1\} \subset V.$$

Hilfsatz 3.2. *Die duale Hyperfläche zu $M_{A^{-1}}$ ist die Quadrik M_{A^*}, die assoziiert mit der dualen Metrik und dem linearen Isomorphismus A^* ist. Das heißt*

$$M^*_{A^{-1}} = M_{A^*} := \{p \in V^* \mid \langle p, A^*p \rangle = 1\}.$$

Beweis. Der affine Tangentialraum von $M_{A^{-1}}$ zum Punkt q ist die Hyperebene $q + T_qM_{A^{-1}} = \{u \in V \mid \langle u, A^{-1}q \rangle = 1\}$. Das heißt, dass

$$q + T_qM_{A^{-1}} = H_{(A^{-1}q)^*}.$$

Die Bildmenge $q \in M_{A^{-1}} \mapsto p = (A^{-1}q)^* \in V^*$ ist die gesuchte Quadrik, denn

$$1 = \langle q, A^{-1}q \rangle = (A^{-1}q)^*q = pq = \langle p, q^* \rangle = \langle p, Ap \rangle.$$ □

3.3 Konfokale Quadriken

Es sei nun $A : V \to V$ symmetrisch aber nicht unbedingt invertierbar. Wir betrachten die Familie der Quadriken, die konfokal mit A sind. Die wird durch ein Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ folgendermaßen beschrieben:

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \mapsto \qquad M_\lambda := M_{(A-\lambda I)^{-1}},$$

wobei $I : V \to V$ die Identitätsabbildung ist. Wir setzen voraus, dass alle die Eigenwerte von A einfach sind und wir gekennzeichnen sie mit $a_1 < \ldots < a_n$. Für eine kompaktere Notation setzen wir $a_0 := -\infty$. Dann ist die Quadrik M_λ nur für $\lambda \neq a_1, \ldots, a_n$ definiert. Die ist ein Ellipsoid für $\lambda < a_1$ und leer für $\lambda > a_n$. Die Richtungen $\mathbb{R}v_1, \ldots \mathbb{R}v_n$ der Eigenvektoren von $(A - \lambda I)^{-1}$ sind von λ unabhängig und heißen Hauptachsen der Familie.

Satz 3.3 (Jacobi)**.** *Durch einen Punkt $q \in V$ außerhalb der zu den Hauptachsen senkrechten Hyperebenen laufen genau n Quadriken $M_{\lambda_1(q)}, \ldots M_{\lambda_n(q)}$ der konfokalen Familie, wobei $\lambda_i(q) \in (a_{i-1}, a_i)$. Für jede $h \neq k$ scheiden sie sich $M_{\lambda_h(q)}$ und $M_{\lambda_k(q)}$ in q senkrecht. Nämlich stehen die Normalenvektoren von $M_{\lambda_h(q)}$ und $M_{\lambda_k(q)}$ in q senkrecht zueinander.*

Beweis. Bis auf der Eiführung von orthonormalen Koordinaten ist $(V, \langle , \rangle)$ isomorph zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und

$$M_\lambda = \Big\{ (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \frac{q_1^2}{a_1 - \lambda} + \ldots + \frac{q_n^2}{a_n - \lambda} = 1 \Big\}.$$

Also wenn wir einen Punkt q haben, für den $q_i \neq 0$ für alle i, ist dann die Funktion

$$\lambda \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{a_i - \lambda}$$

leicht zu studieren. Die ist monoton wachsend auf jedem Intervall (a_{i-1}, a_i). Auf $(-\infty, a_1)$ geht von 0 bis $+\infty$. Auf den Anderen von $-\infty$ bis $+\infty$. Also hat $1 - \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{a_i - \lambda}$ eine einfache Nullstelle auf jedem von diesen Intervallen.

Der Normalenvektor von M_{λ_h} in q ist parallel zu

$$\nu_h = \Big(\frac{q_1}{a_1 - \lambda_h}, \ldots, \frac{q_n}{a_n - \lambda_h} \Big)$$

Deshalb gilt für $h \neq k$

$$\begin{aligned}
\nu_h \cdot \nu_k = \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{(a_i - \lambda_h)(a_i - \lambda_k)} &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{\lambda_h - \lambda_k} \Big(\frac{1}{a_i - \lambda_h} - \frac{1}{a_i - \lambda_k} \Big) \\
&= \frac{1}{\lambda_h - \lambda_k} \Big(\sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{a_i - \lambda_h} - \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{a_i - \lambda_k} \Big) \\
&= \frac{1}{\lambda_h - \lambda_k} (1 - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.4. Für alle $q \in V$ heißen $\lambda_1(q), \dots, \lambda_n(q)$ konfokale Koordinaten von q.

Bemerkung 3.5. Wenn $V = \mathbb{R}^2$ und $\xi = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \eta = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ elliptische Koordinaten bezüglich zwei Brennpunkte mit Abstand c vom Urspung sind, gilt dann

$$\lambda_1 = c^2 - \xi^2 \in (-\infty, 0), \qquad \lambda_2 = c^2 - \eta^2 \in (0, c).$$

Durch Dualität und die orthogonale Projektion entlang einer Gerade kann man den Satz von Jacobi anwenden, um die Berührungspunkte zwischen einer festen affinen Gerade und der Quadriken der Familie.

Satz 3.6 (Chasles)**.** *Es sei g eine generische Gerade (sie muss zum Beispiel in keiner der Quadriken der Familie enthalten sein). Dann es gibt $n-1$ Quadriken $M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_{n-1}}$ die tangent zu g sind. Die Berührungen sind regulär und die Normalenvektoren von M_{λ_i} in den Berührungspunkten sind paarweise orthogonal.*

Beweis. Es sei $v \in V$ die Richtungsvektor der Gerade g. Es sei $\iota : W \hookrightarrow V$ die orthogonale Hyperbene W zu v und es sei $\pi : V \to W$ die orthogonale Projektion. Wir haben die duale Abbildung $\pi^* : W^* \to V^*$, $\pi^* p = p \circ \pi$. Die ist injektiv mit Bild $\{p \in V \mid p \cdot v = 0\}$.

Es sei weiter $q_g \in W$ den Schnittpunkt zwischen g und W. Wir betrachten nun die Hyperflächen $\pi(M_\lambda)$. Ein Punkt $q \in W$ gehört zu $\pi(M_\lambda)$ genau dann, wenn die Gerade $t \in q + tv$ die Quadrik M_λ in einem Punkt q' berührt. Es ist nützlich dann zu setzen

$$M'_\lambda := \{q' \in M_\lambda \mid v \in T_{q'} M_\lambda\}$$

Dann $\pi(M_\lambda) = \pi(M'_\lambda)$ und

$$\forall\, q' \in M_\lambda, \qquad T_{q'} M_\lambda = \mathbb{R}v \oplus T_{\pi(q')} \pi(M_\lambda). \tag{3.2}$$

Wir behaupten nun, dass $\lambda \mapsto \pi(M_\lambda)$ eine konfokale Familie von Quadriken in W ist und zwar

$$\pi(M_\lambda) = M_{(\pi A \iota - \lambda I)^{-1}}. \tag{3.3}$$

Wenn das gewährgeleistet würde, finden wir nach dem Satz von Jacobi $\pi(M_{\lambda_1}), \dots, \pi(M_{\lambda_1})$, die q_g enthalten und senkrecht zueinander sind. Wenn wir die entsprechenden Berührungspunkte $q'_1, \dots, q'_{n-1}$ auf g betrachten, sehen wir mittels (3.2), dass $T_{q'_i} M_{\lambda_i}$ und $T_q \pi(M_\lambda)$ den gleichen Normalenvektor haben. Das liefert die gewünschte Orthogonalität.

Es bleibt, die Gleichung (3.3) zu zeigen. Zu diesem Zweck nehmen wir die dualen Hyperflachen von $\pi(M_\lambda)$ in W^*. Nach der Definition von Dualität und (3.2), ist $p \in \pi(M_\lambda)^* \subset W^*$ genau dann, wenn es $q' \in M'_\lambda$ gibt mit $T_{q'} M_\lambda = \mathbb{R}v \oplus H_p$. Es folgert daraus, dass

$$q' + T_{q'} M_\lambda = H_{\pi^* p}.$$

Das heißt,

$$\pi^*(\pi(M_\lambda)^*) = M_\lambda^* \cap \pi^*(W^*).$$

Also

$$\pi(M_\lambda)^* = \{p \in W^* \mid \langle \pi^* p, (A^* - \lambda I)\pi^* p \rangle = 1\}.$$

Wir können das Skalarprodukt umschreiben:

$$\langle \pi^* p, (A^* - \lambda I)\pi^* p \rangle = \langle \iota^* \pi^* p, \iota^* (A^* - \lambda I) \pi^* p \langle = \langle p, ((\pi A \iota)^* - \lambda I) p \rangle.$$

Wir folgern daraus, dass $\pi(M_\lambda)^* = M_{(\pi A \iota)^* - \lambda I}$. Jetzt folgt (3.3) nach Lemma 3.1. □

4 Anwendung: Geodätischer Fluß auf Ellipsoiden

Mit den obigen Überlegung kann man zeigen, dass der geodätische Fluß auf einem $n-1$-dimensionalen Ellipsoid $M \subset \mathbb{R}^n$ integrabel ist. Wir nehmen an, dass die definierende symmetrische Matrix A $n-1$-distinkte Eigenwerte $0 < a_1 < \ldots < a_n$ besitzt. Es seien weiter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die mit A assoziierten konfokalen Koordinaten. Dann für $\lambda \in (a_{i-1}, a_i)$ ist $M_\lambda = \{\lambda_i = \lambda\}$. Wir bekommen entsprechende Funktionen $\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_n : \Gamma \to \mathbb{R}$ auf der symplektischen Mannigfaltigkeit der orientierten Geraden in $\mathbb{R}^n$. Die Funktionen $\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_n$ Poisson-kommutieren nach dem Satz von Chasles und Hilfsatz (2.3). Wir nehmen nun $\lambda = 0$ und bekommen das Ellipsoid $M = M_0$. Im Abschnitt 1 haben wir gezeigt, dass der Hamiltonsche Fluß von $\tilde{\Lambda}_1$ auf $\{\tilde{\Lambda}_1 = 0\}$ der geodätische Fluß auf dem Einheitstangentialbündel in M ist.

Folgerung 4.1. *Es sei γ eine Geodäte auf dem Ellipsoid M. Generisch gibt es $n-2$ zu M konfokale Quadriken $M^1, \ldots, M^{n-2}$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gerade $s \mapsto \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$ tangent zu jeder M^k ist.*

Genauer ist es möglich n Poisson-kommutierende Funktionen

$$F_1(\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_n), \qquad F_n(\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_n)$$

zu finden, so dass $F_1 + \ldots, F_n = 1$ und die funktional Matrix $(dF_1, \ldots, dF_n)$ fast überall rank $n-1$ besitzt. Diese Funktionen lassen sich auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Formel

$$F_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \qquad F_i(q,p) = p_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(q_i p_j - q_j p_i)^2}{a_i - a_j}$$

fortsetzen. Nun die Einschränkung dieser Funktionen auf T^*M liefert eine Anzahk von n Poisson-kommutierende ersten Integralen. Also lokal findet man immer $n-1$ davon die funktional unabhängig sind.

Um eine konkrete geometrische Vorstellung zu haben, nehmen wir ein zwei-dimensionales Ellipsoid $M \subset \mathbb{R}^3$. In diesem Fall ist die Gerade durch $(q,p) \in \Sigma$ tangent zu genau einen anderen Quadrik $M_{\lambda(q,p)}$ der Familie. Die Funktion $\lambda : \Sigma \to [a_1, a_3]$ ist dann ein erstes Integrale mit $\{\lambda, \frac{1}{2}|p|^2\} = 0$. Die Menge $\{\lambda = a_1\}$ ist die Geodäte in der Ebene $\{q_1 = 0\}$. Auf ähnlicher Weise ist $\{\lambda = a_3\}$ die Geodäte in der Ebene $\{q_3 = 0\}$. Die Menge $\{\lambda = \mu\}$ für $\mu \in (a_1, a_2)$ ist von denjenigen Geodäten geblättert, die in der Region $\{q \in M \mid \lambda_2(q) \leq \mu\}$ liegen und tangent zum Rand sind. Auf ähnlicher Weise ist die Menge $\{\lambda = \mu\}$ für $\mu \in (a_2, a_3)$ von denjenigen Geodäten geblättert, die in der Region $\{q \in M \mid \lambda_3(q) \geq \mu\}$ liegen und tangent am Rand sind. Endlich ist die Menge $\{\lambda = a_2\}$ von denjenigen Geodäten geblättert, die durch einigen der 4 Nabelpunkten von M laufen. Die sind die Schnittpunkte zwischen M und der Hyperbel

$$\left\{ (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; q_2 = 0,\ -\frac{q_1^2}{a_2 - a_1} + \frac{q_3^2}{a_3 - a_1} = 1 \right\}.$$

In $\{\lambda = a_2\}$ haben wir die Geodäte in der Ebene $\{q_2 = 0\}$. Wenn $q \in M \setminus \{q_2 = 0\}$ dann existieren genau 4 Richtungen $p_1, p_2, p_3, p_4 \in T_qM$, sodass $\lambda(q, p_i) = a_2$. Dann ist jede der entsprechenden 4 Geodäten die kürzeste Geodäte zwischen q und einem Nabelpunkt. Da $p_3 = -p_1$ und $p_4 = -p_2$, folgern wir daraus, dass jede Geodäte in $\{\lambda = a_2\}$ wird nur ein Paar von antipodalen Nabelpunkten abwechselnd besuchen.

Quellen

- Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1989.
- Klingenberg, *Riemannian geometry*, Second Edition, Studies in Mathematics, de Gruyter, 1995.
- Moser, *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978), 233–289, Birkhäuser, 1980.
- Tabachnikov, Billiards, Panoramas et Synthèses, no. 1, 1995.
- Tabachnikov, Geometry and billiards, American Mathematical Society, 2005.